SISTEMAS FORMAIS

#07

decidibilidade



Número Imaginário

numeroimaginario
.com
.br

DECIDIBILIDADE

Definição: Um sistema formal F é **decidível** se existe um algoritmo que, dada uma fórmula qualquer do sistema, decide se ela é ou não um teorema desse sistema.

Caso contrário, o sistema é dito **indecidível**.

DECIDIBILIDADE



DECIDIBILIDADE DO SISTEMA SOMA

Vamos primeiramente mostrar que os conceitos de verdade e teorema de S são equivalentes.

Relembrando:

$x + y = z$ é verdadeira se o nº de ocorrências do símbolo '$*$' é igual em ambos os lados do símbolo '$=$'.

DECIDIBILIDADE DO SISTEMA SOMA

No episódio passado, mostramos que todo teorema é verdadeiro (metateorema 1).

Falta mostrarmos que toda fórmula verdadeira é um teorema de S (possui demonstração) – metateorema 2.

Prova do metateorema 2

Seja $x + y = z$ uma fórmula verdadeira qualquer. Queremos demonstrar que ela possui prova no sistema SOMA.

Sejam i, j e k o nº de ocorrências do símbolo ‘$*$’ de x, y e z.

Então , $i + j = k$

Prova do metateorema 2

(R1) $\dfrac{x+y=z}{x*+y=z*}$

Uma prova sempre começa do axioma

$$*+*=**$$

Usamos $i-1$ vezes a regra (R1), sempre na fórmula anterior. Obtemos

$$\underbrace{***\cdots*}_{1+i-1}+*=\underbrace{****\cdots*}_{2+i-1}$$

Prova do metateorema 2

(R2) $\dfrac{x + y = z}{y + x = z}$

Usamos a regra (R2)

$$* + * * * \cdots * = * * * * \cdots *$$

Usamos $j - 1$ vezes a regra (R1), sempre na fórmula anterior. Obtemos

$$\underbrace{* * * \cdots *}_{1 + j - 1} + * * * \cdots * = * * * * \cdots * \underbrace{* * * \cdots *}_{j - 1}$$

Prova do metateorema 2

(R2) $\dfrac{x + y = z}{y + x = z}$



$1 + j - 1$ $\quad$ $1 + i - 1$ $\quad$ $2 + i - 1$ $\quad$ $j - 1$





$j + i$ $\qquad$ $i + j = k$

Prova do metateorema 2

Dada um fórmula x+y=z verdadeira:

α é verdadeira
então $\vdash \alpha$

1. Axioma →
2. i-1 vezes (R1) sempre na fórmula anterior →
3. usamos (R2) na última fórmula →
4. j-1 vezes (R1) sempre na fórmula anterior
5. Aplica (R2) para inverter novamente

DECIDIBILIDADE DO SISTEMA SOMA

Com os dois metateoremas, mostramos que os conceitos de verdade e teorema de S são equivalentes.

Assim, para sabermos se um teorema possui prova, basta sabermos se ele é verdadeiro, o que pode ser mecanizado. ■

SISTEMAS FORMAIS

Episódio #07
DECIDIBILIDADE

NÚMERO IMAGINÁRIO

numeroimaginario.com.br

vinicius@numeroimaginario.com.br

2016